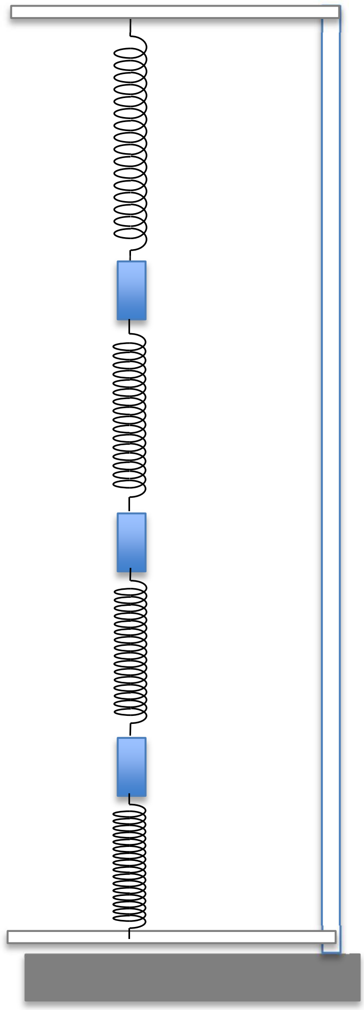
振動_4_4 つのばねでつながれた 3 物体の振動

印

| 組 | 番 | |
|---|---|---|
| | | |

**目的**　ばねでつながれた多数の物体の振動を調べるため、3物体を4つのばねで挟んだ状況を調べる。

**方法**　同じばね定数 $k$ =6.7N/m の4つの（赤）ばねで、同じ質量 $m$ =0.020kg の3つのおもりを挟むように実験台に取り付ける。実験スタンドにクランプを上下へ2つつけ、棒になるものを固定する。次に1つ目のばねを上の棒から吊り下げ、その下に1つ目のおもりを吊り下げ、その下に2つ目のばねを吊り下げ、その下に2つ目のおもりを吊り下げ、その下に3つ目のばねを吊り下げ、その下に3つ目のおもりを吊り下げ、その下に4つ目のばねを吊り下げて下端を下の棒に引っかける。



**観察**　3つのおもりをいい加減に振動させると、それぞれのおもりは単振動をせず、いくつかの振動が混じったような複雑な振動をする。なにかうまいやりかたで3つのおもりを振動させてきれいな単振動をさせられるだろうか。そのとき観測される単振動の周期から導かれる合成ばね定数を求められるだろうか。

3体の場合、実験的アプローチはかなり難しくなる。物体が3つで手が2つしかないことも要因だが、振動モードは 3 つある。1つめはたぶん見つかる、2つめもなんとか見つけられるかもしれないが、3つめはなかなか見つけられないだろう。したがって、1 つなら満点で 6 点、2 つなら満点で 8 点、3 つなら満点で 10 点とした。

## 実験的アプローチ

【実験1】3 つのおもりをいっぺんに動かして各おもりがそれぞれ単純な単振動をするように試行錯誤する。2 物体のときにはなかった真ん中のおもりをそっと持って、上下のおもりから余計な振動を感じないように繊細に速さを変えながら振動させると 2 つめが見つかる可能性がある。3 つのおもりがそれぞれ単振動するパターンは 3 種類あるので 3 つとも見つける努力をする。見つけることが出来た各パターンで 3 つのおもりがどのように振動しているか、その特徴がわかるように書きなさい。

| | |
|---|---|
| 単振動のパターン1では、 | （1 点） |
| 単振動のパターン 2 では、 | （1 点） |
| 単振動のパターン 3 では、 | （1 点） |

【実験2】 実験1で見つけた単振動の各パターンで、おもりの周期をストップウォッチで測定し、周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ の公式を利用して相当するばね定数 $k'$ を求める。このとき質量 $m$ はおもり1つの質量 $m$=0.020kg を使うこと。

| 振動パターン | 10 周期 | 1 周期 $T$ | $T^2$ | $\pi^2\times4\times m$ | ばね定数 $k'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| パターン1 | 秒 | 秒 | | | $k_1'$= N/m |
| パターン2 | 秒 | 秒 | | | $k_2'$= N/m |
| パターン3 | 秒 | 秒 | | | $k_3'$= N/m |

$\pi=3.1416$ とする

(1 点)

(1 点)

(1 点)

**理論的アプローチ**

【考察】2つのおもりの運動を、運動方程式を利用して分析する。それぞれのおもりのつり合いの位置から下向きの変位を $x_1$、$x_2$、$x_3$とすると、各ばねの伸び縮みの解釈、力の矢印から、運動方程式は次のように書ける。

上のおもり　$ma_1=-kx_1+k(x_2-x_1)$

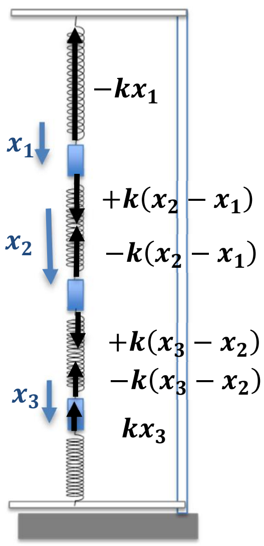
中のおもり　$ma_2=-k(x_2-x_1)+k(x_3-x_2)$

下のおもり　$ma_3=-kx_3-k(x_3-x_2)$

$x_1$:上ばね伸び

$x_2-x_1$：中上ばね伸び 、$x_3-x_2$が正→中下ばね伸び

$x_3$：下ばね縮み




$x_1$、$x_2$、$x_3$3 つがある決まった組合せで動くときだけ単振動する。そこで、$x_1+\boldsymbol{b}\,x_2+\boldsymbol{c}\,x_3$　として、
$m(a_1+\boldsymbol{b}\,a_2+\boldsymbol{c}\,a_3)=-\boldsymbol{k'}(x_1+\boldsymbol{b}\,x_2+\boldsymbol{c}\,x_3)$
という形の単振動の運動方程式が成り立つような、$\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{c}$と$\boldsymbol{k'}$を探す。

【課題】(上のおもりの運動方程式) + $\boldsymbol{b}$ (中のおもりの運動方程式) + $\boldsymbol{c}$ (下のおもりの運動方程式)
とすると、
左辺=$m(a_1+\boldsymbol{b}\,a_2+\boldsymbol{c}\,a_3)$　となることと
右辺=$-k(\ (2-\boldsymbol{b})x_1+(2\boldsymbol{b}-1-\boldsymbol{c})\,x_2+(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\,x_3\ )$　と書けることを示しなさい。　(2 点)

【課題】 右辺=$-k(\ (2-\boldsymbol{b})x_1+(2\boldsymbol{b}-1-\boldsymbol{c})\,x_2+(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\,x_3\ )$ = $\underline{-\boldsymbol{k'}(x_1+\boldsymbol{b}\,x_2+\boldsymbol{c}\,x_3)}$ と　書けるための条件は

$x_1$、$x_2$、$x_3$の係数を比べて

$k(\,2-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{k'}\cdots$(1)　　$k(2\boldsymbol{b}-1-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{k'b}\cdots$(2)　　$k(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{k'c}\cdots$(3)

という連立方程式になる。この連立方程式を解いて$\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{c}$と$\boldsymbol{k'}$を求めなさい。解は 3 通りある。

$\boldsymbol{k}$=6.7N/m を用いてと$\boldsymbol{k'}$も数値で表せ。

(1 点)

$\boldsymbol{b_1}$ =　　$\boldsymbol{c_1}$ =　　$\boldsymbol{k'_1}$ =　　、$\boldsymbol{b_2}$ =　　$\boldsymbol{c_2}$ =　　$\boldsymbol{k'_2}$ =　　、$\boldsymbol{b_3}$ =　　$\boldsymbol{c_3}$ =　　$\boldsymbol{k'_3}$ =

【実験 2】との比較から、各振動パターンはどれに相当するか。 (1 点)